

I-114 移動荷重をうける弦の運動に関する研究 (第1報)

下 坂 陽 男

Motions of a Stretched String Under a Moving Load

Haruo SHIMOSAKA

Abstract

Many kinds of advanced transport systems have motivated a number of analytical studies of dynamic effects of moving loads on the structure. But not so many analytical studies on the motion of a stretched string excited by moving loads have been carried out so far. Most of them have employed Fourier expansions in order to describe the motion of the string. From the engineering viewpoint Fourier expansions may be considered to be weak in convergence in numerical analyses.

This paper presents a new method based on the characteristics of wave functions for simulating the motion of the string by a digital computer. Because the simulation is executed by transferring wave functions stored in computer memories in order, this method may be effective to reduce cumulative errors of the digital simulation with the procession of the simulation.

The reactive force generated at the location of a moving mass particle, which has been decided by employing iterative method so far, can be algebraically calculated by employing the divided difference in this newly developed method.

Analysis of the system are also carried out, in case that a moving load is leaving or approaching a rigidly fixed support.

Examples of various computer simulations show validity of this method.

1. 緒 言

今日では多くの輸送機関が長足の進歩を遂げ、車両の高速化および輸送量の増大にともない軌道および構造は以前とくらべて振動や動的応力の影響を大きくうけるようになった。また一方では建設費の高騰から軽量の構造で安全快適に走行しうることが要求され、安全性、信頼性、保全性、経済性、長寿命性などを高める設計が必要となっている。このような背景から構造物と移動荷重とが構成する力学系に関する研究は古くから行われている。

C.E. Smith は両端を固定した弦上を移動する荷重の影響を移動荷重のインパルスを用いて表している¹⁾。L. Fryba は同じ問題についての V. Kolousek の成果をその著書で紹介している²⁾。C.E. Smith および V. Kolousek の方法は厳密ではあるが、級数展開を用いているため実際に数値計算を行うには不向きである。なぜなら

ば弦では移動荷重の着力点が角折れ状となるので級数の高次の項まで考慮しなければならないからである。

集電系では車両の高速化を実現するためパンタグラフと架空電車線が構成する力学系に関する多くの実用的研究が行われている。江原は架空電車線を多質点弦で表し走行するパンタグラフからトロリ線に加わる力を影響係数を用いて組み込む方法で高速集電の力学現象を解明した³⁾。

著者らは、索条上を走行する懸垂式交通機関のシミュレーションを行い弦と移動荷重とが構成する力学系の実用的解法を示した⁴⁾。

本論文では、両端を固定された弦と移動荷重(質量のない一定集中荷重あるいは質点が走行する場合)とが構成する力学系を取扱い、弦の運動を波動関数で表す実用的解法を示している。この実用的解法においては、弦が走行質点に及ぼす力を代数計算により決定する方法を示すとともに、固定端近くを移動荷重が走行する場合の解

析を行っている。さらに解析結果に基いた計算機プログラムを開発し、シミュレーションを行った結果を示している。

記号

ρ : 単位長当り弦の質量

g : 重力加速度

S : 弦の張力

$c = \sqrt{S/\rho}$: 波動伝播速度

$\left. \begin{matrix} f_1(x-ct) \\ f_2(x-ct) \end{matrix} \right\}$: 進行波

$\left. \begin{matrix} g_1(x+ct) \\ g_2(x+ct) \end{matrix} \right\}$: 後退波

$y(x, t)$: 弦の変位

$F_i(t)$: 表示点 i における時刻 t の進行波の値

$G_i(t)$: " 後退波の値

$Y_i(t)$: 表示点 i における時刻 t の変位

l : 弦長

F_R : 弦が移動荷重に及ぼす力, 移動荷重が弦に及ぼす力

v : 移動荷重の水平方向速度

ΔT : 計算時間間隔

$\Delta l = c \cdot \Delta T$: 表示点間距離

$j, j+1$: 移動荷重に隣接する表示点

$y_w(t)$: 弦の自重によるたわみを加えた移動荷重の変位

$y_m(t)$: 移動質量の変位 (弦の自重によるたわみを含まない)

$y_c(t)$: 移動荷重の着点における弦の変位

m : 移動質点の質量

2. 弦と移動荷重が構成する系の運動方程式

図1に示すように両端を固定して張られた弦上に荷重が一定速度で走行する場合について考える。この系を解析するに当たって以下の仮定をする。

1. 弦の曲げ剛性はないものとする。
2. 弦の張力は十分に大きく、振動によって張力変動はないものとする。
3. 運動は鉛直面内だけを考える。
4. 弦の鉛直方向変位は、弦の長さにくらべて十分小さいものとする。

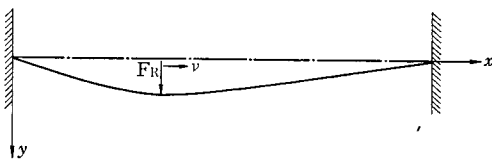


図1 移動荷重をうける弦

いものとする。

5. 弦の内部摩擦等の減衰は無視する。

荷重の着力点は弦を二つの部分に分割する。これら二つの部分を別々に取扱い、着力点における動的平衡条件と弦の連続性の条件を用いて系の運動を記述する⁹⁾。

荷重の着力点を除いた部分の弦の運動方式は次式で表される。

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho g \quad (1)$$

移動荷重の後方および前方にある弦の変位は式(1)よりそれぞれ次式で与えられる。

$$y(x, t) = f_1(x-ct) + g_1(x+ct) + \frac{\rho g}{2S} \cdot x \cdot (l-x), \quad 0 \leq x \leq vt \quad (2)$$

$$y(x, t) = f_2(x-ct) + g_2(x+ct) + \frac{\rho g}{2S} \cdot x \cdot (l-x), \quad vt \leq x \leq l \quad (3)$$

荷重の着力点 $x=vt$ では、式(2), (3)で与えられる弦の変位は一致する。すなわち、弦の変位の連続性を表す次式を得る。

$$f_1[(v-c)t] + g_1[(v+c)t] = f_2[(v-c)t] + g_2[(v+c)t] \quad (4)$$

荷重の着力点における弦の動的平衡条件を導くために次の座標変換を行う。

$$\xi = x - vt, \quad \tau = t \quad (5)$$

式(5)の変換を施すと式(1)は次式となる。

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} - 2\rho v \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \tau} + \rho v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = S \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \rho g \quad (6)$$

図2を参照して、荷重と接触している部分の弦の運動方程式を式(6)より求めると次式となる。

$$\begin{aligned} \rho(\xi_2 - \xi_1) \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = S \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_1} \right] + \rho g(\xi_2 - \xi_1) \\ + 2\rho(\xi_2 - \xi_1)v \frac{\partial y}{\partial \tau} \Big|_{\xi=\xi_2} - \frac{\partial y}{\partial \tau} \Big|_{\xi=\xi_1} \\ - \rho(\xi_2 - \xi_1)v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\xi_2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\xi_1} + F_R \end{aligned}$$

集中移動荷重を考えているから $\xi_1 \rightarrow \xi_2 \rightarrow 0$ なる極限をとると、着力点における弦の動的平衡条件は次式となる。

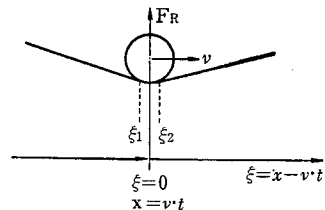


図2 移動荷重の着点におけるつりあい

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=vt-0} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=vt+0} = \frac{1}{1-(v/c)^2} \cdot \frac{F_R}{S} \quad (7)$$

式(2), (3)を用いて式(7)を書き直すと次式となる。

$$f_1'[(v-c)t] + g_1'[(v+c)t] - f_2'[(v-c)t] - g_2'[(v+c)t] = \frac{1}{1-(v/c)^2} \cdot \frac{F_R}{S} \quad (8)$$

結局, 式(2), (3), (4)および式(8)を解くことによって問題の解を得る。

3. 波動を利用した解法

図3に示すように左固定端から Δl 間隔で順次とった表示点の状態では弦の運動を記述する。ここで表示点間隔 Δl は次の関係を満たすようにとる。

$$\Delta l = c \cdot \Delta T \quad (9)$$

Δl をこのようにとると, 波動の性質によって, t_0 時の一つの表示点における波動関数の値を相隣る表示点の $t_0 + \Delta T$ 時の波動関数の値とすることができる。すなわち波動関数の値を移しかえることによって弦の運動が記述できる。

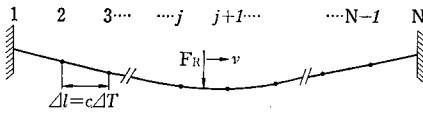


図3 表示点による弦の運動の記述

固定端あるいは荷重の前後の表示点を除いた表示点 i における t_0 から $t_0 + \Delta T$ への変化は図4に示すように次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} F_i(t_0 + \Delta T) &= F_{i-1}(t_0) \\ G_i(t_0 + \Delta T) &= G_{i+1}(t_0) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

さらにこの点における変位は次式で表される。

$$Y_i(t_0 + \Delta T) = F_i(t_0 + \Delta T) + G_i(t_0 + \Delta T) + \frac{\rho g}{2S} \cdot x_i \cdot (l - x_i) \quad (11)$$

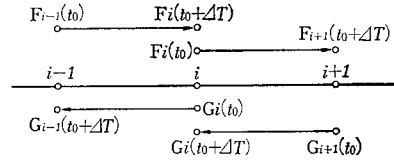


図4 車両に隣接しない表示点における波動の伝播

移動荷重が近くない場合の固定端における状態の変化はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} G_1(t_0 + \Delta T) &= G_2(t_0) \\ F_1(t_0 + \Delta T) &= -G_2(t_0) \\ F_N(t_0 + \Delta T) &= F_{N-1}(t_0) \\ G_N(t_0 + \Delta T) &= -F_{N-1}(t_0) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

図3で示すように, 移動荷重の着点前後の表示点を j および $j+1$ で表す。図5に示すように, $t_0 + \Delta T$ 時に移動荷重に向かって来る進行波 $f_1[(v-c)(t_0 + \Delta T)]$ は $j-1$ と j における t_0 時の進行波を用い, また後退波 $g_2[(v+c)(t_0 + \Delta T)]$ は $j+1$ と $j+2$ における t_0 時の後退波を用いて補間法により求める。すなわち,

$$\left. \begin{aligned} f_1[(v-c)(t_0 + \Delta T)] &= F_{j-1}(t_0) \\ &\quad + \frac{F_j(t_0) - F_{j-1}(t_0)}{\Delta l} \cdot (\Delta x + v \cdot \Delta T) \\ g_2[(v+c)(t_0 + \Delta T)] &= G_{j+1}(t_0) \\ &\quad + \frac{G_{j+2}(t_0) - G_{j+1}(t_0)}{\Delta l} \cdot (\Delta x + v \cdot \Delta T) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となる。

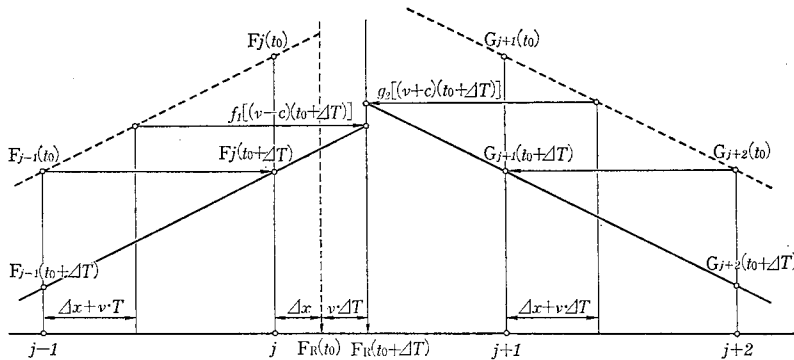


図5 移動荷重の近くにおける波動の伝播

3.1 質量のない一定集中荷重が走行する場合

質量のない一定集中荷重が走行する場合には, 式(8)において F_R を一定として, 微小時間間隔 $t_0 \sim t_0 + \Delta T$ にわたって積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{v-c} \cdot \{f_1[(v-c)(t_0 + \Delta T)] - f_1[(v-c)t_0]\} \\ &+ \frac{1}{v+c} \cdot \{g_1[(v+c)(t_0 + \Delta T)] - g_1[(v+c)t_0]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{v-c} \cdot \{f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)]-f_2[(v-c)t_0]\} \\
 & -\frac{1}{v+c} \cdot \{g_2[(v+c)(t_0+\Delta T)]-g_2[(v+c)t_0]\} \\
 & =\frac{1}{1-(v/c)^2} \cdot \frac{F_R}{S} \cdot \Delta T \quad (14)
 \end{aligned}$$

移動荷重の着点における $t_0+\Delta T$ 時の弦の変位の連続性を表す式は式(4)より次式となる。

$$\begin{aligned}
 & f_1[(v-c)(t_0+\Delta T)]+g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)] \\
 & =f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)]+g_2[(v+c)(t_0+\Delta T)] \quad (15)
 \end{aligned}$$

式(14), (15)において, $f_1[(v-c)(t_0+\Delta T)]$, $g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)]$, $f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)]$, $g_2[(v+c)(t_0+\Delta T)]$ のうち, $f_1[(v-c)(t_0+\Delta T)]$ および $g_2[(v+c)(t_0+\Delta T)]$ は式(13)によって求められるから, 式(14), (15)を用いて, 残る $g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)]$ および $f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)]$ をつぎのように決定できる。

$$\begin{aligned}
 g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)] & =\frac{F_R}{2S} \cdot c \cdot \Delta T \\
 & -\frac{c+v}{2c} \cdot f_1[(v-c)t_0]+\frac{v-c}{2c} \cdot g_1[(v+c)t_0] \\
 & +\frac{c+v}{2c} \cdot f_2[(v-c)t_0]+g_2[(v+c)(t_0+\Delta T)] \\
 & -\frac{v-c}{2c} \cdot g_2[(v+c)t_0] \quad (16) \\
 f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)] & =f_1[(v-c)(t_0+\Delta T)] \\
 & +g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)]-g_2[(v+c)(t_0+\Delta T)] \quad (17)
 \end{aligned}$$

式(13), (16)および(17)を順次使えば $t_0+\Delta T$ 時に移動荷重に向って来る波および荷重で反射されて出て行く波を記述できる。この記述が終了すれば $t_0+\Delta T$ 時における移動荷重の変位は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 y_v(x_v, t_0+\Delta T) & =f_1[(v-c)(t_0+\Delta T)]+g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)] \\
 & +\frac{\rho g}{2S} \cdot x_v \cdot (l-x_v) \\
 & =f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)]+g_2[(v+c)(t_0+\Delta T)] \\
 & +\frac{\rho g}{2S} \cdot x_v \cdot (l-x_v) \quad (18)
 \end{aligned}$$

表示点 j および $j+1$ における状態の変化は以下のようになる。 j の $t_0+\Delta T$ 時における進行波は t_0 時に $j-1$ にあったものであるから次式で与えられる。

$$F_j(t_0+\Delta T)=F_{j-1}(t_0) \quad (19)$$

後退波 $G_j(t_0+\Delta T)$ は移動荷重の着点における後退波 $g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)]$ と $j-1$ における後退波 $G_{j-1}(t_0+\Delta T)$ を用いた補間によって次のように定めることができる。ここで $G_{j-1}(t_0+\Delta T)=G_j(t_0)$ であるから

$$\begin{aligned}
 G_j(t_0+\Delta T) & =G_j(t_0)+\frac{g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)]-G_j(t_0)}{\Delta l+\Delta x+v \cdot \Delta T} \\
 & \cdot \Delta l \quad (20)
 \end{aligned}$$

となる。

式(19), (20)より j の $t_0+\Delta T$ 時における変位は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 Y_j(t_0+\Delta T) & =F_j(t_0+\Delta T)+G_j(t_0+\Delta T) \\
 & +\frac{\rho g}{2S} \cdot x_j \cdot (l-x_j) \quad (21)
 \end{aligned}$$

同様に, $j+1$ の $t_0+\Delta T$ 時における後退波は t_0 時に $j+2$ にあったものであるから次式で与えられる。

$$G_{j+1}(t_0+\Delta T)=G_{j+2}(t_0) \quad (22)$$

進行波 $F_{j+1}(t_0+\Delta T)$ は移動荷重の着点における進行波 $f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)]$ と $j+2$ における進行波 $F_{j+2}(t_0+\Delta T)$ を用いた補間によってつぎのように定めることができる。ここで, $F_{j+2}(t_0+\Delta T)=F_{j+1}(t_0)$ であるから,

$$\begin{aligned}
 F_{j+1}(t_0+\Delta T) & =f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)] \\
 & +\frac{F_{j+1}(t_0)-f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)]}{2\Delta l-(\Delta x+v \cdot \Delta T)} \\
 & \cdot (\Delta l-\Delta x-v \cdot \Delta T) \quad (23)
 \end{aligned}$$

となる。

式(22), (23)より $j+1$ の $t_0+\Delta T$ 時における変位は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 Y_{j+1}(t_0+\Delta T) & =F_{j+1}(t_0+\Delta T)+G_{j+1}(t_0+\Delta T) \\
 & +\frac{\rho g}{2S} \cdot x_{j+1} \cdot (l-x_{j+1}) \quad (24)
 \end{aligned}$$

一定集中荷重が固定端近くにない場合には, 式(10), (11), (12), (13), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23), (24), を用いることにより系の運動が記述できる。

3.2 質点が走行する場合

走行する質点の運動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{y}_m=mg-F_R \quad (25)$$

質量がない一定集中荷重が走行する場合と異なり弦が質点に及ぼす力 F_R は未知量となっている。文献(6)では F_R の値を仮定してくり返し計算によっていたが, ここでは微少時間間隔 ΔT についての差分形式を用いて弦が走行質点に及ぼす力 F_R を直接求める。

式(25)より F_R は次式で表される。

$$F_R(t)=mg-m\ddot{y}_m(t) \quad (26)$$

式(8)に式(26)を代入して $t_0 \sim t_0+\Delta T$ にわたって積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{v-c} \cdot \{f_1[(v-c)(t_0+\Delta T)]-f_1[(v-c)t_0]\} \\
 & +\frac{1}{v+c} \cdot \{g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)]-g_1[(v+c)t_0]\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{v-c} \cdot \{f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)] - f_2[(v-c)t_0]\} \\
 & -\frac{1}{v+c} \cdot \{g_2[(v+c)(t_0+\Delta T)] - g_2[(v+c)t_0]\} \\
 & = \frac{1}{1-(v/c)^2} \cdot \frac{1}{S} \cdot [mg \cdot \Delta T - m\{\dot{y}_m(t_0+\Delta T) \\
 & \quad - \dot{y}_m(t_0)\}] \quad (27)
 \end{aligned}$$

つぎに、移動質点の着力点において移動質点の変位と弦の変位とが一致する条件より次式を得る。

$$\begin{aligned}
 y_m(t_0+\Delta T) \\
 & = f_1[(v-c)(t_0+\Delta T)] + g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)] \\
 & = f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)] + g_2[(v+c)(t_0+\Delta T)] \quad (28)
 \end{aligned}$$

また、 ΔT に関する微分商は次式で与えられる。

$$\dot{y}_m(t_0+\Delta T) = \frac{y_m(t_0+\Delta T) - y_m(t_0)}{\Delta T} \quad (29)$$

式(28), (29)を用いて式(27)を整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{c^2}{c^2-v^2} \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{m}{\Delta T} + \frac{1}{v-c} \right\} \cdot f_1[(v-c)(t_0+\Delta T)] \\
 & + \left\{ \frac{c^2}{c^2-v^2} \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{m}{\Delta T} + \frac{1}{v+c} \right\} \cdot g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)] \\
 & - \frac{1}{v-c} \cdot f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)] \\
 & - \frac{1}{v+c} \cdot g_2[(v+c)(t_0+\Delta T)] \\
 & = \frac{c^2}{c^2-v^2} \cdot \frac{1}{S} \cdot \left\{ mg \cdot \Delta T + m \cdot \frac{y_m(t_0) + \dot{y}_m(t_0) \cdot \Delta T}{\Delta T} \right\} \\
 & + \frac{1}{v-c} \cdot f_1[(v-c)t_0] + \frac{1}{v+c} \cdot g_1[(v+c)t_0] \\
 & - \frac{1}{v-c} \cdot f_2[(v-c)t_0] - \frac{1}{v+c} \cdot g_2[(v+c)t_0] \quad (30)
 \end{aligned}$$

移動質点が、図3に示すように j と $j+1$ の間を走行しているとする、式(13)より $f_1[(v-c)(t_0+\Delta T)]$ および $g_2[(v+c)(t_0+\Delta T)]$ がわかる。さらに、式(15)と式(30)の二式より $f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)]$ および $g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)]$ が以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
 g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)] & = \frac{S \cdot \Delta T}{mc^2 + 2S \cdot c \cdot \Delta T} \\
 & \cdot \left[\frac{c^2}{S} \left\{ mg \cdot \Delta T + m \frac{y_m(t_0) + \dot{y}_m(t_0) \cdot \Delta T}{\Delta T} \right\} \right. \\
 & - (v+c)f_1[(v-c)t_0] - (v-c)g_1[(v+c)t_0] \\
 & + (v+c)f_2[(v-c)t_0] + (v-c)g_2[(v+c)t_0] \\
 & \left. - \frac{mc^2}{S \cdot \Delta T} \cdot f_1[(v-c)(t_0+\Delta T)] \right] \\
 & + 2c \cdot g_2[(v+c)(t_0+\Delta T)] \quad (31) \\
 f_2[(v-c)(t_0+\Delta T)] & = f_1[(v-c)(t_0+\Delta T)] \\
 & + g_1[(v+c)(t_0+\Delta T)] - g_2[(v+c)(t_0+\Delta T)] \quad (17)
 \end{aligned}$$

式(13), (31), (28)あるいは式(13), (17), (28)より

$y_m(t_0+\Delta T)$ を決定することができ、弦の自重によるたわみをこれに加えると走行質点の変位は次式で表される。

$$\begin{aligned}
 y_v(t_0+\Delta T) & = y_m(t_0+\Delta T) \\
 & + \frac{\rho g}{2S} \cdot v \cdot (t_0+\Delta T) \{l - v \cdot (t_0+\Delta T)\} \quad (32)
 \end{aligned}$$

式(26)とつぎの差分商

$$\ddot{y}_m(t_0+\Delta T) = \frac{y_m(t_0+\Delta T) - \dot{y}_m(t_0)\Delta T - y_m(t_0)}{\Delta T^2}$$

より、弦が走行質点に及ぼす力 $F_R(t_0+\Delta T)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 F_R(t_0+\Delta T) \\
 & = m \left\{ g - \frac{y_m(t_0+\Delta T) - \dot{y}_m(t_0) \cdot \Delta T - y_m(t_0)}{\Delta T^2} \right\} \quad (33)
 \end{aligned}$$

走行質点が固定端近くでない場合には、式(10), (11)により質点に隣接しない表示点の状態変化が記述され、式(12)によって固定端における反射が記述される。走行質点に向って来る進行波、後退波は式(13)より求め、走行質点から出て行く進行波、後退波は式(17), (31)より求まる。弦が走行質点に及ぼす力は式(33)より直接求めることができる。走行質点に隣接する表示点 j , $j+1$ における状態の変化は、式(19), (20), (21)および式(22), (23), (24)によりそれぞれ記述される。

4. 移動荷重が固定端近くを走行する場合の解析

移動荷重が固定端近く（厳密には、固定端と移動荷重との距離が表示点間距離 Δl よりも短い区間）を走行しているときには、図6に示すように移動荷重と固定端との間で多数回の反射が生じ、固定端と移動荷重の間にある弦の運動を波動関数を用いて表すことがむずかしい。このような理由から移動荷重が固定端近くを走行する場合には、移動荷重と固定端との間にある弦の波動を無視する。すなわち弦の質量を無視した場合、移動荷重の着力点における力のつりあいは次式となる。

$$S \cdot \left\{ \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{v \rightarrow 0} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{v \rightarrow 0} \right\} = F_R \quad (34)$$

移動荷重の着力点における弦の変位を y_v とすると式

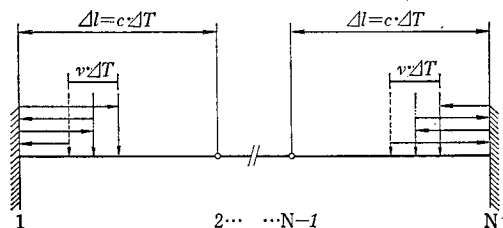


図6 移動荷重と固定端の間の多数回の反射

(34) より次式を得る。

$$S \cdot \left(\frac{y_c}{vt} + \frac{y_c}{l-vt} \right) = F_R \quad (35)$$

質量のない一定集中荷重が走行する場合には式(35)より着力点における弦の変位を次式で直接求めることができる。

$$y_c = \frac{F_R}{S} \cdot \frac{vt}{l} \cdot (l-vt) \quad (36)$$

質点が走行する場合には、 F_R が未知数となっているので移動荷重の着力点における弦の変位を式(36)のように表すことができない。この場合には式(35)と式(26)から F_R を消去して整理すると次式を得る。

$$mvt(l-vt)\ddot{y}_m + Sl y_m = mgvt(l-vt) \quad (37)$$

式(37)を解けば移動荷重の着力点における変位を求めることができ、さらに式(35)を用いれば、弦が走行する質点に及ぼす力 F_R を求めることができる。ここで式(37)について考察してみる。つぎの変数変換

$$\eta = \frac{S}{mg l} \cdot y_m, \quad \beta = \frac{Sl}{mv^2}, \quad \xi = \frac{vt}{l}$$

を行って式(37)を整理すると次式を得る。

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \beta \eta = \beta \xi(1-\xi) \quad (38)$$

式(38)は C.E. Smith が本研究とは別の方法で導いた式と一致する⁹⁾。式(38)でさらにつぎの変換

$$\eta = \xi(1-\xi)\zeta$$

を行うと次式を得る。

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2} + 2(1-2\xi) \frac{d\zeta}{d\xi} - (2-\beta)\zeta = \beta \quad (39)$$

式(39)の同次微分方程式は超幾何微分方程式あるいは

$$y_m(t_0 + \Delta T) = \frac{v \cdot (t_0 + \Delta T) \{ l - v \cdot (t_0 + \Delta T) \} [mg \Delta T^2 + m \{ y_m(t_0) + \dot{y}_m(t_0) \Delta T \}]}{mv \cdot (t_0 + \Delta T) \cdot \{ l - v \cdot (t_0 + \Delta T) \} + Sl \Delta T^2} \quad (42)$$

を得る。さらに式(35)と式(42)から $t_0 + \Delta T$ 時の F_R の値を求めることができる。

式(35)あるいは式(37)は走行質点が固定端に到着した瞬間には意味をもたない。あるいは固定端に到着した瞬間、走行質点の変位は有限であるから、 F_R が無限大になるということもできる。しかし実際には弦の支持点はある程度弾性支持されており、むしろ完全な固定端を作り出すことはむずかしい。したがって上述のような極端なことは現実にはおこらないといってもよい。

5. シミュレーション結果

前章までに説明した解法に基いて計算機プログラムを製作しシミュレーションを行った結果を図7-9に示す。

図7は、右側固定端から $l/5$ の所をつまんで静かに離

Gauss の微分方程式といわれ、 $\xi=0, 1, \infty$ が確定特異点となっている⁹⁾。固定端近くを質点が走行する場合は $\xi=0$ 、および $\xi=1$ の近くで式(39)の解を求めることに他ならない。

走行質量が左側固定端を φ なる角度で出発するときの初期条件は次式で表される。

$$y_m(0)=0, \quad \dot{y}_m(0)=\varphi v \quad (40)$$

この初期条件を満足する $\xi=0$ の近傍における式(39)の解は次式となる。

$$y_m = \xi(1-\xi) \cdot \left\{ \varphi \cdot F_\beta(\xi) - \frac{mg}{S} \cdot \frac{F_\beta(\xi)-1}{1-2/\beta} \right\} \cdot l \quad (41)$$

ここに、 $F_\beta(\xi)$ は超幾何級数で

$$F_\beta(\xi) = 1 + \left(1 - \frac{\beta}{1.2}\right)\xi + \left(1 - \frac{\beta}{1.2}\right)\left(1 - \frac{\beta}{2.3}\right)\xi^2 + \dots$$

である。

$\xi \rightarrow 1$ 、すなわち走行質点が右側固定端に近づくときにはつぎのようになる。

$$(1) \quad \beta=2 \text{ の場合 } y_m \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{mg}{S} \cdot l$$

$$(2) \quad \beta=n(n+1), \quad n=2, 3, 4, \dots \text{ の場合 } y_m \rightarrow 0$$

$$(3) \quad \beta \neq n(n+1) \text{ の場合 } y_m \rightarrow \text{constant} \neq 0$$

式(41)および上記(1)~(3)を C.E. Smith は導いている⁹⁾がこの結果は、固定端のきわめて近傍を質点が走行するときのみ有効であることに注意をする必要がある。あるいは上記の C.E. Smith の結果をそのままシミュレーションプログラムに組み込むには問題があるといってもよい。

本研究では y_m の ΔT に関する差分形式を用いて式(37)を直接解く。すなわち、

した場合の弦の自由振動波形をおおよそ $1/8$ 周期ごとに $1/2$ 周期まで描いたものである。太実線と○は弦の形を、点線と□は進行波を；一点鎖線と△は後退波をそれぞれ表している。二点鎖線は初期および $1/2$ 周期後の弦の形を表しており、文献(10)に説明されている図式解法で利用される。同文献の図式解法で得た形と図7が一致することはいうまでもない。

図8は、(1)弦の質量を無視した場合、(2)弦の質量を考慮した場合、について移動荷重の走行軌跡と移動荷重の着力点において弦が荷重に及ぼす力を描いたものである。この計算に用いた数値は、

$$mg=5000 \text{ kgf}, \quad S=50000 \text{ kgf}, \quad \rho g=25 \text{ kgf}$$

$$c=140 \text{ m/s}, \quad v=14 \text{ m/s}, \quad c/v=10$$

である。実線は質点自重を静的に負荷した場合の着力点

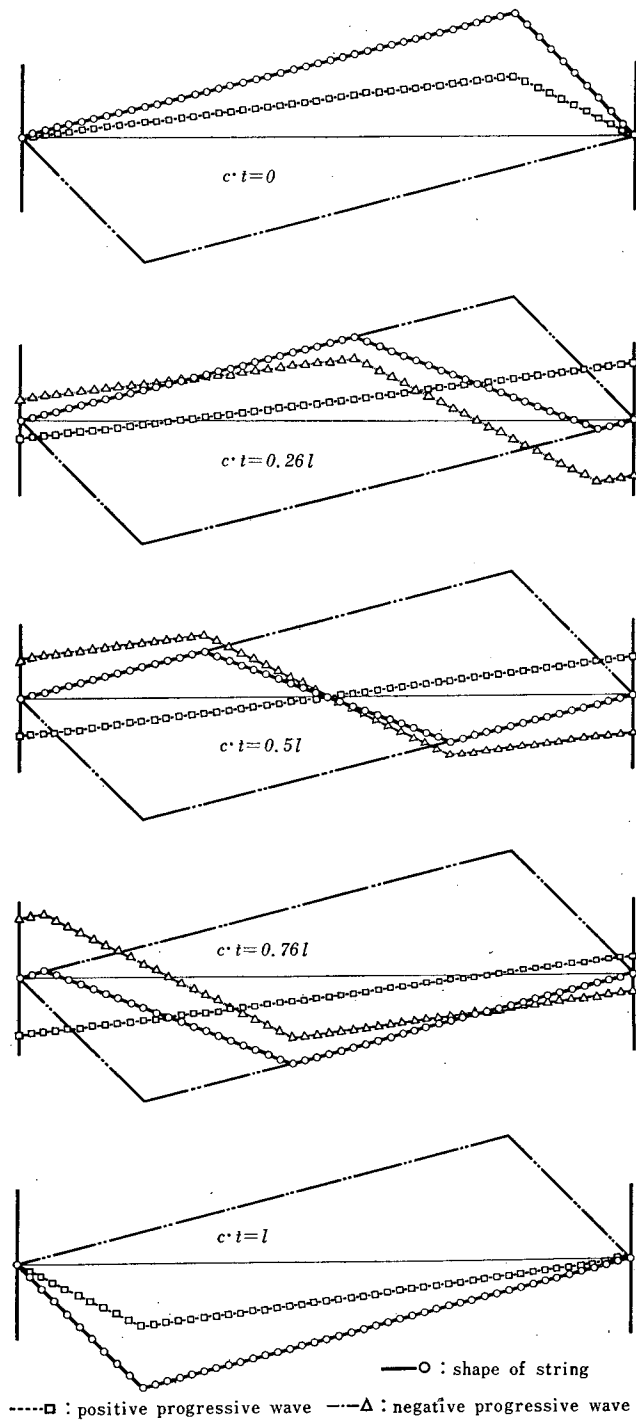


図7 弦の自由振動

変位を表している。弦の質量を無視した場合と弦の質量を考慮した場合とでは、移動荷重の走行軌跡はほぼ一致しているが、弦が移動荷重に及ぼす力 F_R は両者で少々

異っている。すなわち、弦の質量を考慮した場合の方が F_R の変動が大きくなっている。この現象についての解析は次報で報告する。

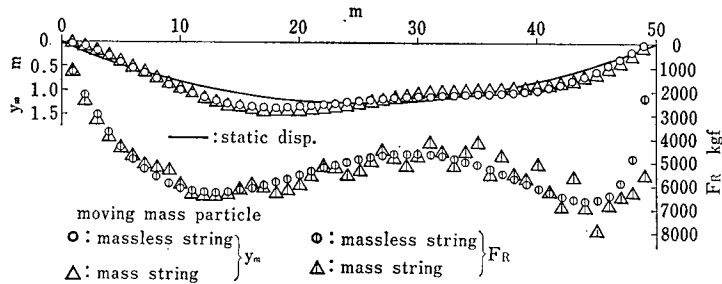


図8 移動質点の軌跡と弦が移動質点に及ぼす力

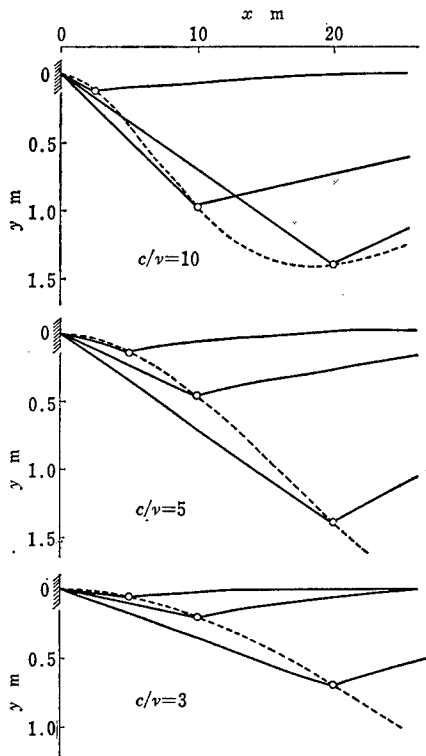


図9 移動荷重の移動速度を変えたときの弦の形

図9は、他のパラメータ値を一定にして質点の走行速度だけを変化させた場合の弦の形を描いたものである。点線は走行質点の軌跡を表している。質点の走行速度が早くなるにつれて、走行質点の軌跡の最大値が出現する時期がおくれてくることがわかる。

6. 結 論

本報告では、弦と移動荷重とが構成する力学系において弦の運動を波動関数で表して解く実用的方法を示した。

弦が走行質点に及ぼす力は、従来はくり返し計算により決定していたが、本報告では、この力を直接代数計算により決定する方式を確立した。

固定端近くを荷重が走行する場合、微分方程式の確定特異点近傍の解が系の挙動を表す。しかしこの解はきわめて狭隘な範囲で有効であり実際の数値計算には不向きである。

さらにシミュレーションにより本報告で提案した方法が有用であることを示した。

文 献

- 1) Smith, C.E., Trans. ASME, Ser. E, 31-1 (1964-3), p. 29-31
- 2) Fryba, L., Vibration of solids and structures under moving Loads, p. 231-233 (1972), Noordhoff International Publishing
- 3) 江原, 機論, 36-287 (昭45-7), p. 1068
- 4) 下坂, 井口, 機論, 46-404 (昭55-4), p. 409
- 5) スミルノフ, 高等数学教程, II-2, p. 497 (昭42), 共立
- 6) 文献4), p. 412
- 7) 文献1), p. 34
- 8) 寺沢, 自然科学者のための数学概論, p. 308-311 (1971), 岩波
- 9) 文献1), Appendix
- 10) 文献5), p. 486-487